Cours du 12.04.2021 MATIN

lundi, 12 avril 2021 10:14

Examen : 29.04.2021
(lundi 26.04 séance "révision")

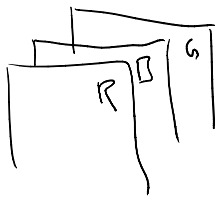
Les Matrices :

Une matrice est un TABLEAU de nombres (variables !) à 2 dimensions !

Une matrice $M_{n \times m}$ est une matrice *avec n* lignes et *m* colonnes.

On dit que l'élément $m_{ij} = M[i][j]$ $\begin{cases} i^{\text{ème}} \text{ ligne} & i = 1, \dots, n \\ j^{\text{ème}} \text{ Colonne} & j = 1, \dots, m \end{cases}$

$$M_{n \times m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1m} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nm} \end{pmatrix}$$



Cas particuliers : qu'est-ce qu'un vecteur ???

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Est-ce une matrice ? OUI ?

$\vec{x} = X_{n \times 1}$ (matrice colonne)

3 (scalaire) => c'est une matrice 1 ligne 1 colonne !!

Multiplication par un scalaire :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n \times m} \longmapsto \mathbb{R}_{n \times m}$$

$$\lambda \cdot M_{n \cdot m} \longmapsto M'_{n \times m}$$

$$\lambda M_{n\times m} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda m_{11} & \lambda m_{12} & \cdots \\ \lambda m_{21} & \lambda m_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$m'_{ij} = \lambda m_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \end{matrix}$$

Si la matrice est un vecteur COLONNE, on retrouve la multiplication par un scalaire d'un vecteur...)

On peut prouver que la multiplication par un scalaire d'une matrice a les propriétés usuelles (associatif, distributif par rapport à l'addition PAS commutatif).

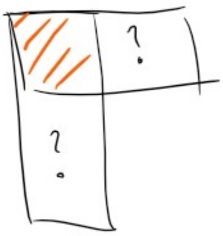
Addition Matricielle :

$$+ : \mathbb{R}_{n\times m} \times \mathbb{R}_{n\times m}$$

$$M_{n\times m} = A_{n\times m} + B_{n\times m} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}+b_{11}} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \vdots & \end{pmatrix}_{n\times m}$$

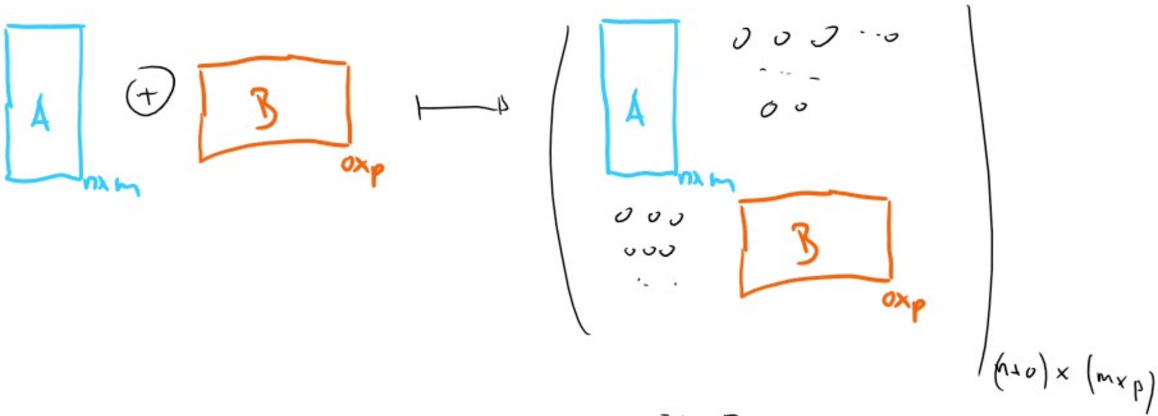
$$m_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \end{matrix}$$

ATTENTION
Aux DIMENSIONS



Somme "directe"

$$\oplus : \mathbb{R}_{n\times m} \oplus \mathbb{R}_{o\times p} \longmapsto \mathbb{R}_{(n+o)\times(m+p)}$$



$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \in [1, \dots, n],\ j \in [1, m] \\ b_{ij} & \text{si } i \in [n+1, \dots n+o],\ j \in [m+1, \dots, m+p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Produit Matriciel :

$$\times : \mathbb{R}_{n \times m} \times \mathbb{R}_{m \times p} \longmapsto \mathbb{R}_{n \times p}$$

⚠ Si les dimensions ne concordent **PAS**, le produit matriciel n'est PAS défini !!!

Produit vectoriel comme produit matriciel :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \underline{c} \qquad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X_{n \times 1}$$

Géom Vectorielle !

$\|$

scalaire

$$X_{1 \times N} \times Y_{N \times 1} = C_{1 \times 1}$$

$$X_{1 \times N} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}_{1 \times n}$$

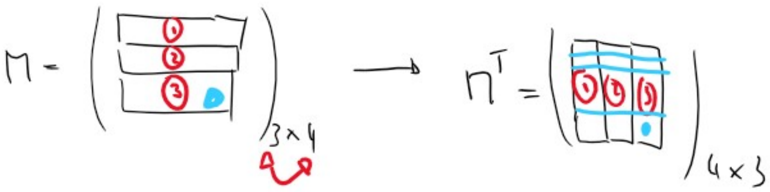
$$(x_1 \ x_2 \dots x_n)_{1\times n} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \square_{1\times 1} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$\Downarrow$ $X = \vec{x}^{T}$ Transposé !

$\Downarrow$ $Y = \vec{y}$

Transposée d'une matrice :

Transposer une matrice revient à "inverser" les lignes et les colonnes....



$$(M^T)_{ij} = m_{ji} \qquad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$(m_{43})^T = m_{34}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n1} \rangle = (\vec{x}^T)_{1n} \times \vec{y}_{n1} = (\text{scal})_{1\times 1}$$

$$\langle \vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n1} \rangle = (\vec{x}^T)_{1n} \times \vec{y}_{n1} = (\text{scal})_{1\times 1}$$

↳ mult. matri

QUESTION : quelles sont les propriétés du PRODUIT MATRICIEL ???

- Associatif ? $(A \times B) \times C \overset{?}{=} A \times (B \times C)$? Oui

$$\underbrace{(A_{n\times m} \times B_{m\times p})}_{D_{n\times p}} \times C_{p\times q} = R_{n\times q}$$

$$D_{n\times p} \; C_{p\times q} = R_{n\times q}$$

$$A_{n\times m} \times \underbrace{(B_{m\times p} \times C_{p\times q})}_{E_{m\times q}} = R_{n\times q}$$

$$(A \times B) \times C - A \times (B \times C) = 0_{n\times q} \quad \text{si c'est associatif !}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{23} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & \boxed{a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad E =$$

$$d_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

$$R_{n\times q} = \underbrace{\boxed{D_{n\times p} \cdot C_{r\cdot q}}_{ij} - \boxed{A \cdot E}_{ij}}_{0} \Rightarrow r_{ij} = \underbrace{d_{i1}} c_{1j} + d_{i2} c_{2j} + \dots$$

$$= \left(a_{i1} + b_{11} + a_{i2} + b_{21} + \dots\right) \cdot c_{1j} + \dots$$

Esquisse => A FINIR AU PROPRE !!!

LE multiplication matricielle est-elle COMMUTATIVE ????

$A \times B \overset{?}{=} B \times A$?

NON car regardons les dimensions :

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = C_{n\times p}$$

$$\not\parallel$$

$$\underbrace{B_{m\times p} \times A_{n\times m}}_{\text{PAS ÉGAL}} \overset{?}{=} C_{m\times m}$$

Dans le cas GENERAL, si AxB, on ne peut même pas garantir que BxA soit défini !!!
AxB et BxA sont définis SI ET SEULEMENT SI $A_{n\times m}$, $B_{m\times n}$

Même si les matrices sont carées, alors

$$A_{n\times n} \times B_{n\times n} \neq B_{n\times n} \times A_{n\times n}$$

En fait $A \times B = (B \times A)^T$ si $B \times A$ et $A \times B$ sont définis ?